ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 13.12.2024.

VI РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза:
$$|1-2|+|2-3|+|3-4|+...+|2023-2024|+|2024-2025|.$$

2. Када се половини непознатог броја дода 28, добија се $\frac{2}{3}$ броја -258. Одреди непознати број.

3. Један унутрашњи угао једнакокраког тупоуглог троугла је три пута већи од другог унутрашњег угла тог троугла. Одреди мере унутрашњих углова тог троугла.

4. Напиши најмањи и највећи петоцифрени број коме су све цифре различите, а дељив је са 9.

5. У троуглу ABC симетрала спољашњег угла код темена C и симетрала спољашњег угла код темена B, секу се у тачки D. Израчунај меру угла BDC, ако је $\measuredangle BAC = 65°$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 58/1**) Приметимо да је
$$|1-2|=|2-3|=...=|2024-2025|=|-1|=1,$$
тј. сваки сабирак једнак је 1 [**10 бодова**]. Како је број сабирака једнак 2024, резултат је 2024 [**10 бодова**].

2. (**МЛ 57/5**) Ако је непознати број x, тада на основу услова датих у задатку можемо поставити једначину
$$\frac{1}{2}x+28=\frac{2}{3}\cdot(-258)$$ [**9 бодова**].

Решавањем једначине добијамо
$$\frac{1}{2}x+28=-172,\quad \frac{1}{2}x=-172-28,\quad \frac{1}{2}x=-200$$ [**9 бодова**],
па је тражени број $x=-400$ [**2 бода**].

3. (**МЛ 58/1**) Дати троугао је једнакокрак, па су унутрашњи углови на основици подударни [**3 бода**]. Означимо њихову меру са α. Овај троугао је тупоугли, па унутрашњи угао при врху мора бити туп. Из услова да је један унутрашњи угао три пута већи од другог, закључујемо да је угао при врху 3α [**6 бодова**]. Како је збир унутрашњих углова троугла једнак 180°, имамо једначину
$$\alpha+\alpha+3\alpha=180°,\quad 5\alpha=180°$$ [**6 бодова**],
одакле је $\alpha=36°$ [**3 бода**]. Углови троугла су 36°, 36°, 108° [**2 бода**].

4. Број је дељив са 9 ако му је збир цифара дељив са 9 [**4 бода**]. Најмањи збир цифара петоцифреног броја са различитим цифрама је $1+0+2+3+4=10$, а највећи $9+8+7+6+5=35$. Дакле, збир цифара најмањег траженог броја је 18 [**4 бода**], а највећег 27 [**4 бода**]. Најмањи тражени број је 10269 [**4 бода**], а највећи 98730 [**4 бода**].

5. Означимо мере унутрашњих углова троугла ABC са α, β, γ, а мере одговарајућих спољашњих углова са α_1, β_1, γ_1. Означимо меру угла BDC са δ. За углове троугла BCD важи $\delta+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\gamma_1}{2}=180^\circ$ [**5 бодова**].

Први начин. У задатку је дат услов $\alpha = 65^\circ$, одакле је $\alpha_1 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ [**5 бодова**]. Сада је $\beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ - 115^\circ = 245^\circ$ [**4 бода**], па је

$$\frac{\beta_1}{2}+\frac{\gamma_1}{2}=122^\circ 30' \quad [\textbf{4 бода}].$$

Коначно, тражени угао је $\delta = 180^\circ - 122^\circ 30' = 57^\circ 30'$ [**2 бода**].

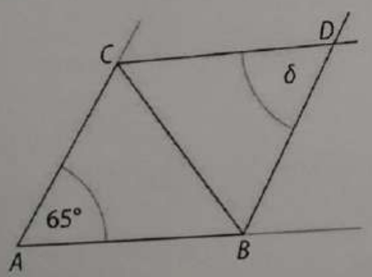
Други начин. На основу познатих веза између мера унутрашњих и спољашњих углова, добијамо $\frac{\beta_1}{2}=\frac{180^\circ-\beta}{2}=90^\circ-\frac{\beta}{2}$ [**2 бода**], $\frac{\gamma_1}{2}=\frac{180^\circ-\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$ [**2 бода**], па је $\frac{\beta_1}{2}+\frac{\gamma_1}{2}=180^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}$ [**2 бода**].

Како је $\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ [**2 бода**], то је

$$\frac{\beta_1}{2}+\frac{\gamma_1}{2}=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=90^\circ+\frac{\alpha}{2} \quad [\textbf{3 бода}].$$

Замењујући добијену једнакост у првој једнакости из решења задатка, добијамо $\delta+90^\circ+\frac{\alpha}{2}=180^\circ$, одакле је $\delta=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ [**2 бода**].

Како је $\alpha = 65^\circ$, тражени угао је $\delta = 90^\circ - 32^\circ 30' = 57^\circ 30'$ [**2 бода**].



ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 13.12.2024.

VII РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза:

$$24\cdot\sqrt{\frac{13}{36}+3}+2\cdot\sqrt{4\cdot(-0{,}36)^2}-(-0{,}6)^2+8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

2. Дате су тачке $A(-2,\ -2)$, $B(-1,\ 3)$ и $C(3,\ 1)$. Израчунај површину троугла ABC.

3. Филип је играјући кошарку након низа од 40 шутева имао успешност погођених кошева 65%. Након још 10 шутева проценат успешности се смањио на 60%. Колико је кошева Филип погодио у последњих 10 шутева?

4. Да ли је вредност израза $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}$ већа или мања од 4?

5. Број 2,220242024... представи у облику $\frac{m}{n}$, где су m и n узајамно прости природни бројеви.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. $24\cdot\sqrt{\frac{13}{36}+3}+2\cdot\sqrt{4\cdot(-0{,}36)^2}-(-0{,}6)^2+8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=$

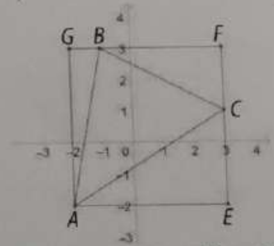
$=24\cdot\sqrt{\frac{13}{36}+\frac{108}{36}}+2\cdot 2\cdot|-0{,}36|-0{,}36+8\cdot\frac{9}{16}$

$=24\cdot\sqrt{\frac{121}{36}}+4\cdot 0{,}36-0{,}36+\frac{9}{2}=24\cdot\frac{11}{6}+1{,}44-0{,}36+4{,}5$

$=44+1{,}08+4{,}5=45{,}08+4{,}5=49{,}58=\frac{4958}{100}=\frac{2479}{50}$ **[20 бодова]**.

Напомена. Бодовати тачно одређена прва два сабирка са **по 5 бодова**, трећи и четврти са **по 4 бода**, а коначно решење са **2 бода**.

2. (**МЛ 57/5**) Површину траженог троугла добијамо када од површине квадрата $AEFG$ одузмемо површине правоуглих троуглова AEC, BFC и BGA [**5 бодова**]. Дакле, површина је $P_{ABC}=P_{AEFG}-(P_{AEC}+P_{BCF}+P_{BGA})=5\cdot 5-\left(\frac{5\cdot 3}{2}+\frac{2\cdot 4}{2}+\frac{5\cdot 1}{2}\right)=25$ [**2 бода**] $-\Big(\frac{15}{2}$ [**3 бода**] $+4$ [**3 бода**] $+\frac{5}{2}$ [**3 бода**]$\Big)=25-(10+4)=11$ [**3 бода**].



3. Филипова успешност након првих 40 шутева је 65%, односно Филип је погодио $\frac{65}{100}\cdot 40=26$ шутева [**8 бодова**]. Затим је након још десет шутева имао успешност 60%, односно погодио је $\frac{60}{100} \cdot (40+10) = \frac{60}{100} \cdot 50 = 30$ шутева [**10 бодова**]. Дакле, Филип је у последњих десет шутева кош погодио 30 – 26 = 4 пута [**2 бода**].

4. (**МЛ 58/1**) Претпоставимо да је вредност израза већа од 4 и затим квадрирајмо неједнакост (све је позитивно и са леве и са десне стране неједнакости):
$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}} > 4$, $12+\sqrt{12+\sqrt{12}} > 16$, $\sqrt{12+\sqrt{12}} > 4$ [**8 бодова**]. Даље, поново квадрирамо добијену неједнакост (све је позитивно и са леве и са десне стране неједнакости): $12+\sqrt{12} > 16$, $\sqrt{12} > 4$ [**8 бодова**]. На крају још једном квадрирајмо неједнакост и добијамо 12 > 16, што није тачно, дакле на почетку ћемо променити знак и тако добијамо тачан низ неједнакости, те је вредност полазног израза мања од 4 [**4 бода**].
Напомена. Ученик може да крене и од разматрања неједнакости $\sqrt{12} < 4$ коју вишеструко примењује да би добио да је вредност полазног израза мања од 4.

5. (**МЛ 59/1**) Означимо број са $x = 2{,}220242024...$ Из једнакости $10x = 22{,}20242024...$ [**2 бода**] и $100000x = 222024{,}20242024...$ [**4 бода**], одузимањем добијамо да је $100000x - 10x = 222024{,}20242024... - 22{,}20242024... = 222002$, односно $99990x = 222002$ [**2 бода**], па је $x = \frac{222002}{99990} = \frac{111001}{49995} = \frac{10091}{4545}$ [**6 бодова**]. Број 10091 је прост (може се и проверити да 10091 није дељив ниједним од делилаца броја $4545 = 3^2 \cdot 5 \cdot 101$), дакле тражени бројеви су $m = 10091$ [**3 бода**] и $n = 4545$ [**3 бода**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 13.12.2024.

VIII РАЗРЕД

1. Одреди растојање средишта дужи AB од равни β, ако су тачке A и B са исте стране равни и од ње удаљене 7 cm и 15 cm.

2. Обим једнакокраког троугла чији је крак за 2 cm дужи од основице, је 22 cm, а обим њему сличног троугла је 33 cm. Израчунај дужине страница оба троугла.

3. Одреди збир свих решења једначине:
$$||2025-2x|-2024|=2023.$$

4. Шта је веће: $5-3\sqrt{3}$ или $2\sqrt{6}-2\sqrt{7}$?

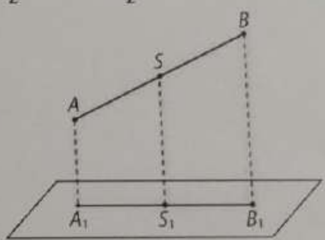
5. Дат је скуп $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Колико има подскупова скупа S чији је производ најмањег и највећег елемента једнак 6?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. **(МЛ 58/1)** Означимо са S средиште дужи AB. Нека су A_1, B_1 и S_1 ортогоналне пројекције тачака A, B и S, респективно, на раван β. Четвороугао A_1B_1BA је правоугли трапез ($\measuredangle AA_1B_1=\measuredangle A_1B_1B=90^\circ$), те је SS_1 средња линија трапеза [**10 бодова**]. Стога је
$$SS_1=\frac{AA_1+BB_1}{2}=\frac{7\text{ cm}+15\text{ cm}}{2}=11\text{ cm}$$ [**10 бодова**].



2. **(МЛ 59/1)** Нека је a основица посматраног једнакокраког троугла, а b крак. Како је $b=a+2$ и $O=22$ cm, то је $O=a+2b=3a+4=22$. Дужине страница троугла су $a=6$ cm и $b=8$ cm [**5 бодова**]. Њему слични троугао је такође једнакокрак [**3 бода**]. Ако је основица a_1 сличног троугла, а b_1 његов крак, онда је $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ [**8 бодова**]. Из обима сличног троугла $O_1=33$ cm следи $33=a_1+2b_1=\frac{11}{4}b_1$, те је $b_1=12$ cm и $a_1=9$ cm [**4 бода**].

3. Вредност израза $|2025-2x|-2024$ може бити 2023 или -2023 [**4 бода**]. Ако је $|2025-2x|-2024=2023$, онда је $|2025-2x|=4047$ [**2 бода**]. Ова једначина има два решења $x=-1011$ [**2 бода**] и $x=3036$ [**2 бода**]. Ако је $|2025-2x|-2024=-2023$, то је $|2025-2x|=1$ [**2 бода**]. Решења ове једначине су $x=1012$ [**2 бода**] и $x=1013$ [2

бода]. Скуп решења полазне једначине је $\{-1011, 1012, 1013, 3036\}$ чији је збир $-1011 + 1012 + 1013 + 3036 = 4050$ [**4 бода**].

4. (**МЛ 59/1**) Приметимо да је $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$, $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ и $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ [**по 2 бода** свака једнакост]. Пошто је $\sqrt{25}>\sqrt{24}$ и $\sqrt{28}>\sqrt{27}$, онда је $\sqrt{25}-\sqrt{27}>\sqrt{24}-\sqrt{28}$ [**10 бодова**]. Дакле, $5-3\sqrt{3}>2\sqrt{6}-2\sqrt{7}$ [**2 бода**].

5. Број 6 се као производ два елемента скупа S може представити на два начина, као $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ [**1 бод**]. Ако је 2 најмањи, а 3 највећи елемент подскупа скупа S, онда тај подскуп мора бити $\{2, 3\}$ [**5 бодова**]. Уколико је 1 најмањи, а 6 највећи елемент подскупа скупа S, онда за сваки од бројева $\{2, 3, 4, 5\}$ имамо две могућности – да припада/не припада уоченом подскупу [**5 бодова**]. Стога оваквих подскупова има $2^4 = 16$ [**8 бодова**]. Укупан број подскупова скупа са траженим својством је $2^4 + 1 = 17$ [**1 бод**].